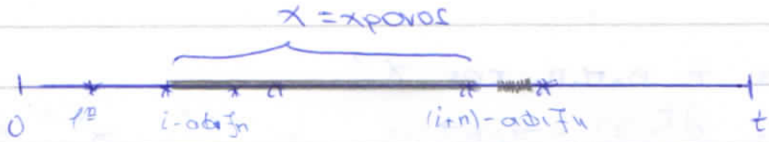
Μαθημα 16ο 1/12/2016

Πιθανοτητες

→ Γενικευση Διων. Κατον.

Κατανομη Erlang – Κατανομη Γαμμα

Διαδικασια Poisson με ρυθμο $\lambda > 0$




Αν $N(t)$ παριστά το πληθος αφιξεων στο $(0,t)$ τοτε $N(t) \sim P(\lambda t)$

Επομενως $P(N(t)=\tau) = P_{N(t)}(\tau) = \dfrac{e^{-\lambda \tau}(\lambda t)^{\tau}}{\tau!}$, $\tau = 0, 1, 2, \ldots$

Εστω μας ενδιαφερει να μελετησουμε το χρονο $X$ μεταξυ n-διαδοχικων αφιξεων

Το $X$ ειναι τ.μ με τιμες $x>0$

Αρα ο χρονος $X$ συνεχης τ.μ

$$P(X>x) = P\left(\begin{matrix}\text{το πολυ } n-1 \\ \text{αφιξεις σε χρονο } x\end{matrix}\right) = P(N(x) \leq n-1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} P_{N(x)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}$$

Επομενως:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = 1 - P(X>0) \Rightarrow$$

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}, \quad x>0$$

Αν επεκτεινουμε την $F_X(x)$ για $x \leq 0$

$$F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

Αρα εχουμε:

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} & , x>0 \\ 0 & , x\le 0 \end{cases}$$

→ Ποια ειναι η σ.π.π της $X$?

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx} = \text{πραξεις} \ldots = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \quad , x>0$$

## Ειδικες Συναρτησεις

### Συναρτηση ή ολοκληρωμα Γαμμα

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx \quad , a\in\mathbb{R}$$

Σε κλασσικη

→ Ιδιοτητα

$\Gamma(a)=(a-1)\cdot\Gamma(a-1) \quad a>1$

$\Gamma(n)=(n-1)! \quad , n\in\mathbb{N}$

### Προταση (Κατανομη Erlang)

Εστω $X$ η τ.μ που παριστα το χρονο μεταξυ $n$-διαδοχικων αφιξεων σε μια διαδικασια Poisson με ρυθμο $\lambda>0$. Τοτε η τ.μ $X$ ειναι συνεχης με τιμες $x>0$ και σ.π.π

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & , x\ge 0 \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$

Η κατανομη αυτη ονομαζεται **κατανομη Erlang** με παραμετρους $n$ και $\lambda$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$, $\lambda>0$

## Παρατηρησεις

① Αν $n=1$ τοτε $Erlang = Εκθ(\lambda)$ → 1 διαδ αφιξ θελω

② Αν $n = \frac{m}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ τοτε η $Erlang = \chi^2_m$

↓

χι-τετραγωνο κατανομη με $m$-βαθμους ελευθεριας

③ Αποδειξαμε οτι:

$$P(X>t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad (*)$$

Αν η $X$ εχει Erlang με παραμετρους $n$ και $\lambda$ τοτε

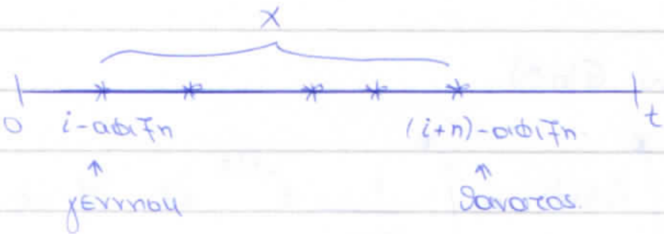
Δεν μπορει να υπολογιστει αριθμ. "τζαμπα κοπος"

$$P(X>t) = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx \quad (^*_*)$$

Απο $(*)$ και $(^*_*)$ εχουμε:

$$\int_t^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

④ Η κατανομη Erlang ειναι μοντελο χρονου ζωης



## Κατανομή Γάμμα

Επέκταση της Erlang για $n = a > 0$, $n \in \mathbb{R}$ και $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma > 0$

### Ορισμός

Η τ.μ $X$ λέγεται **γάμμα** με παραμέτρους $a$ και $\sigma$, $a, \sigma \in \mathbb{R}$, $a, \sigma > 0$ αν το σύνολο τιμών της είναι $x \geq 0$ και σ.π.π την

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^a \, \Gamma(n)} x^{a-1} e^{-x/\sigma} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολισμός : $X \sim G_{\text{ακτινα}}(a, \sigma)$

### Παρατήρηση

a) Είναι $f_X$ σ.π.π ?

i) $f_X(x) \geq 0$, $\forall x$, $\forall a, \sigma > 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^a \, \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/\sigma}\,dx \overset{t = x/\sigma}{=\!=} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a) = 1$$

β) α.σ.κ της $G(a, \sigma)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^{x} \frac{1}{\sigma^a \, \Gamma(a)} e^{-t/\sigma}\,dt \;\; \nexists \text{ σε κλειστή μορφή}$$

Παραδειγμα

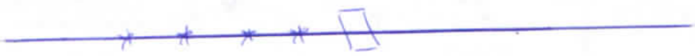
Πελατες φτανουν στο ταμειο με ρυθμο 2 πελατες ανα min

α) Ποια η πιθανοτητα λιγοτεροι απο 2 πελατες σε 3 min

β) Αν ενας πελατης εξυπηρετηθει, ποια η πιθανοτητα να μενει στο ταμειο χωρις πελατη περισσοτερο απο 2 λεπτα

γ) Αν ενας πελατης εξυπηρετηθει ποια η πιθανοτητα ο χρονος που θα χρειαστει για την αφιξη του μεθεπομενου πελατη να ειναι μικροτερος απο 3 λεπτα

απαντηση



Διαδικασια Poisson

α) Εστω $X$ τ.μ πλη/ποσο πληθος πελατων που φτανουν στο ταμειο. Τιμες $X$ $x=0,1,2,\dots$

Αρα $X \sim P(\lambda),\ \lambda>0$ $\quad p_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

Στο 1 min 2 πελατες
Στα 3 min $\lambda=?$ $\Rightarrow \lambda=6$ πελατες

Αρα $X \sim P(6)$, $p_X(x) = \dfrac{e^{-6}6^x}{x!}$

$P$(λιγοτερο απο 2 πελ στο 3 min) $= P(X<2) = P(X=0$ ή $X=1) =$

$= P(X=0) + P(X=1) = p_X(0) + p_X(1) = \dfrac{e^{-6}6^0}{0!} + \dfrac{e^{-6}6^1}{1!} = 0{,}0174$

β) Εστω $Y$ ο χρονος σε λεπτα μεχρι την αφιξη του επομενου πελατη

Αποδειξαμε $Y \sim Exp(\lambda)$ $\quad f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y}$, $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$

$Y \sim Exp(\lambda=2)$

$$P(\text{β}) = P(Y>2) = \begin{cases} \to \int_2^{\infty} 2e^{-2y}\,dy = \dots \\ \to 1-P(Y\le 2) = 1-F_Y(2) = e^{-2\times 2} = e^{-4} = 0{,}0183 \end{cases}$$

γ) Έστω Ζ ο χρόνος σε λεπτά μέχρι την αφίξη του μεθεπόμενου πελάτη.

Το Ζ παρίστα χρόνο μεταξύ n=2 διαδοχικών αφίξεων σε διαδικασία Poisson

Άρα $Z \sim$ Erlang με $n=2$, $\lambda=2$

$$P(\text{γ}) = P(Z<3) = \int_0^3 \frac{2^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-2x}\,dx \quad \underbrace{\Gamma(2)=(2-1)!}_{=1}$$

$$= 4\int_0^3 x\,e^{-2x}\,dx \quad \text{ή} \quad 1-\sum_{k=0}^{2-1} \frac{e^{-2\times 3}(2\times 3)^k}{k!}$$

## Κατανομή Βήτα

### Ορισμός

Η τ.μ Χ λέγεται **Βήτα** με παραμέτρους $a,b>0$, $a,b\in\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της Χ είναι το $(0,1)$ και η σ.π.π της Χ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim \text{Beta}(a,b)$

## Παρατηρηση

α) Το $B(α,β)$ ειναι η συναρτηση ή ολοκληρωμα Βητα που ορίζεται

$$B(α,β) = \int_0^1 x^{α-1}(1-x)^{β-1}\,dx \quad , α,β \in \mathbb{R} \text{ με } α,β>0$$

$$B(α,β) = \frac{Γ(α)\cdot Γ(β)}{Γ(α+β)}$$

β) Αν $α=1$ και $β=1$ τοτε $Beta(1,1) = U(0,1)$

## Κανονικη Κατανομη

### Ορισμος

Μια τμ $X$ θα ονομαζεται **κανονικη** με παραμετρους $μ$ και $σ^2$ $(-\infty<μ<\infty,\ σ^2>0)$ αν το συνολο τιμων της $X$ ειναι $-\infty<x<+\infty$ και η σ.π.π

$$f_X(x) = \frac{1}{σ\sqrt{2π}}\, e^{-\frac{(x-μ)^2}{2σ^2}} \quad , -\infty<x<+\infty$$

Συμβολισμος $X \sim N(μ,σ^2)$

### Ιδιοτητες

① Η $f_X$ ειναι σ.π.π

i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Αποδ. $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{π}}{2}$ , $Γ\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{π}$

② α β κ

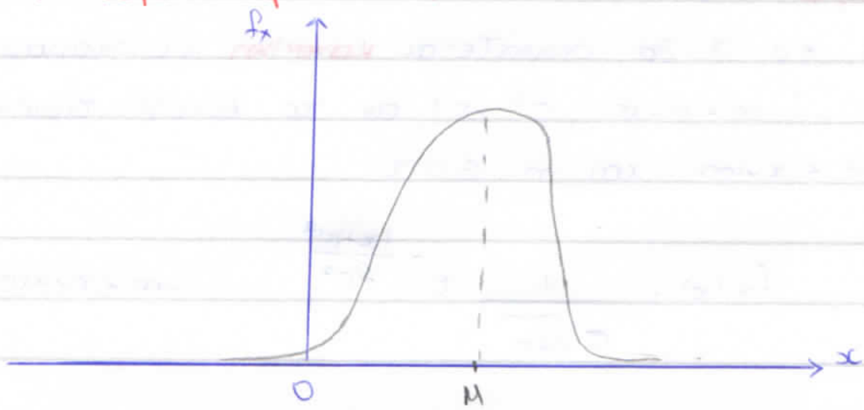
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

δεν υπολογίζεται αναλυτικά

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)\,dx$$

③ Γραφική παράσταση της $f_X$



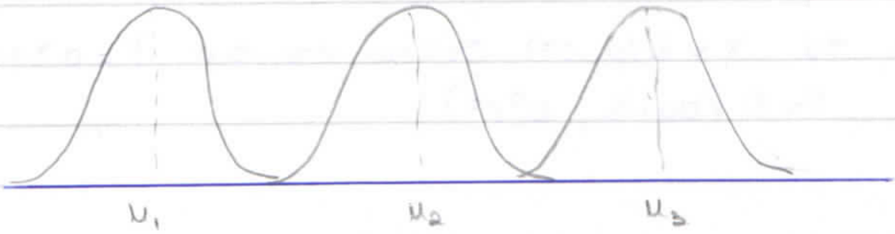

Συμμετρική χώρω από την μ. Παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο μ και η μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

④ Φυσική ερμηνεία των παραμέτρων $\mu, \sigma^2$

→ Φυσική ερμηνεία $\mu$

Θεωρώ τρεις κατανομές $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, $N(\mu_3, \sigma^2)$

$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$

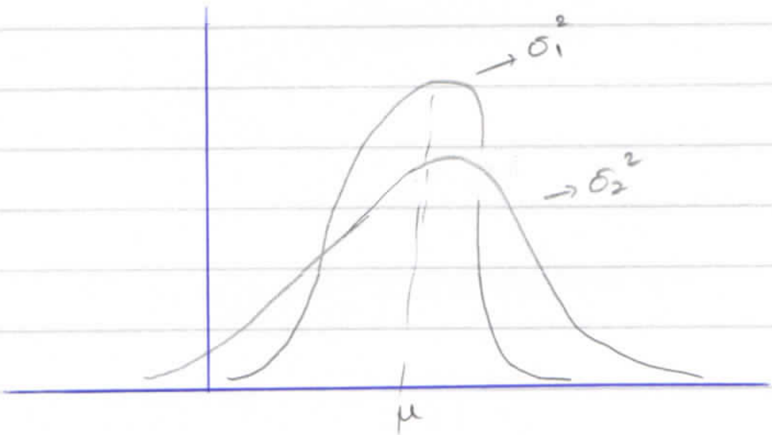



→ παραμετρος θεσης

Παραμετρος μ: Εστω το σημειο χωρω απο το οποιο κατανεμεται, αραδιαζεται μαζα πιθανοτητας ιση με την 1, Ειναι το σημειο η θεση στο $\mathbb{R}$ γυρω απο την οποια συγκεντρωνεται η κατανομη

→ Φυσικη ερμηνεια στη $\sigma^2$

θεωρω $N(\mu, \sigma_1^2)$, $N(\mu, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$




Η παραμετρος $\sigma^2$ εκφραζει το βαθμο συγκεντρωσης της κατανομης γυρω απο την πρωτη παραμετρο μ

⑤ Αναλλοιωτο της Κανονικης Κατανομης

Προταση

Εστω τ.μ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Θεωρω την τ.μ $Y = \alpha X + \beta$, $\alpha \neq 0$

Τοτε $Y \sim N(\alpha\mu + \beta,\ \alpha^2\sigma^2)$